Το λάθος είναι ανώτερο της τέχνης - 1
ΤΑ ΠΛΑΚΑΚΙΑ
(δραστηριότητα στο μάθημα της Γεωμετρίας της Β΄ Τάξης του Λυκείου)

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η εργασία αποτελεί μια δραστηριότητα (ένα μαθηματικό σενάριο) που έγινε πράξη μέσα στην τάξη, που δεν σχεδιάστηκε σαν δραστηριότητα αλλά «προέκυψε» μέσα από τη δυναμική της τάξη, και έτσι παρουσιάζεται εδώ. Το σενάριο αυτό ξεκίνησε από μία άσκηση των κανονικών πολύγωνων της Ευκλ. Γεωμετρίας της Β΄ Λυκείου, από μια συνθήκη που έπρεπε να αποδειχτεί, από μια ελλιπή (ασαφή η ίσως λάθος) εκφώνηση. Τοποθετήθηκε το ερώτημα της ύπαρξης ακέραιων λύσεων, το αν το παράδειγμα αποτελεί αποδεικτική μέθοδο, και αν η σχέση αυτή είναι αναγκαία και ικανή, ερώτημα που δεν μπορούσε να απαντηθεί αμέσως, που έμεινε ανοιχτό και που απαντήθηκε στο τέλος μετά την διαπραγμάτευσή του με την βοήθεια της υπολογιστικής τεχνολογίας. Η αρχή έγινε με μια προσπάθεια για την εύρεση ακέραιων λύσεων με πρακτικό τρόπο, στη συνέχεια με την βοήθεια του excel και στην συνέχεια με την βοήθεια της basic και της του λογισμικού «Γλωσσομάθεια». Η εύρεση ακέραιων λύσεων επιβεβαιώνει ότι η προς απόδειξη συνθήκη είναι αναγκαία συνθήκη. Το σχεδιαστικό πρόγραμμα Corel Draw μας βοήθησε με δύο παραδείγματα να απαντήσουμε ότι η συνθήκη δεν είναι ικανή.

ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΕΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΕΣ, ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ.

Η δραστηριότητα εντάχθηκε στο μάθημα της Γεωμετρίας της Β΄ Τάξης του Λυκείου, στο κεφάλαιο με τα κανονικά πολύγωνα (Κεφ 11).
Η διδακτική προσέγγιση ήταν διερευνητική, βιωματική και συνεργατική.
Εστιάσαμε στη διάκριση των όρων «αναγκαία» και «ικανή» και την αναγνώριση ότι η απόδειξη μιας σχέσης δεν αποτελεί αναγκαία και ικανή συνθήκη.

Χρησιμοποιήσαμε το παράδειγμα και το αντιπαράδειγμα και δείξαμε την αξία του στην αποδεικτική διαδικασία.

Βρήκαμε τη μαθηματική λύση του προβλήματος, και εξετάσαμε αν αυτή αποτελεί και λύση του φυσικού προβλήματος.

Ο χρόνος που χρειαστήκαμε για την δραστηριότητα ήταν, μέρος δύο διδακτικών ωρών μέσα στη σχολική τάξη και τέσσερις πλήρεις διδακτικές ώρες.

Λογισμικά που χρησιμοποιήσαμε:
MS Excel (http://www.microsoft.com/Excel/),
Basic (http://www.qbasic.com/),
Γλωσσομάθεια (http://spinet.gr/glossomatheia/),
Corel Draw (http://www.corel.com/).

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ &
ΕΠΙΜΕΡΟΥΣ ΒΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ ΜΕ ΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΕΣ:

Το σενάριο ξεκινά από την Αποδεικτική Άσκηση 1 σελ 237 του σχολικού βιβλίου του Γεν. Λυκείου. «Το δάπεδο ενός δωματίου στρώθηκε με πλακίδια σχήματος κανονικών πολυγώνων με πλήθος πλευρών λ, μ , ν όπου λ≠μ≠ν≠λ. Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\nu}=\frac{1}{2}$

Παραθέτουμε εν συντομία τη λύση όπως την διαπραγματευτήκαμε στην τάξη.

Η άσκηση θα στηριχτεί στην παραδοχή ότι τα πλακάκια (κανονικά πολύγωνα) θα πρέπει να έχουν μια κοινή κορυφή όπου συναντώνται τρία διαφορετικά πλακάκια με το ίδιο μήκος πλευράς.

Αν υπάρχουν οι γωνίες φ_λ , φ_μ , φ_ν των κανονικών πολυγώνων λ, μ , ν πλευρών αντίστοιχα, τότε θα πρέπει να ισχύει $\varphi_\lambda+\varphi_\mu+\varphi_\nu=360^0 \rightarrow$

$(180-\frac{360}{\lambda})+(180-\frac{360}{\lambda})+(180-\frac{360}{\lambda})=360 \rightarrow 3*180-360*(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\nu})=360 \rightarrow$

$3-2(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\nu})=2 \rightarrow -2(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\nu})=-1 \rightarrow (\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\nu})=\frac{1}{2}$

Η λύση αυτή θα πρέπει να ισχύει για λ, μ , ν φυσικούς αριθμούς με $\lambda \neq \mu \neq \nu \neq \lambda$. Υπάρχουν όμως τέτοιοι αριθμοί;

α) Δώσαμε το θέμα στους μαθητές για να βρουν διερευνητικά στο χαρτί αν υπάρχουν αυτοί οι αριθμοί. Την δεύτερη φορά που θέσαμε το ερώτημα, βρέθηκε μία λύση από τους μαθητές κι εκεί θέσαμε το ερώτημα «η λύση αυτή είναι μοναδική;»

Η επαναληπτικότητα των πράξεων που γίνονται $\kappa \rightarrow \varphi_\kappa=180-\omega_\kappa \rightarrow$ $\varphi_\kappa=180-{}^{360}/_\kappa \rightarrow \varphi_\kappa+\varphi_\lambda+\varphi_\mu = ?\ 360$ οδηγεί στην αναγκαιότητα της υπολογιστικής τεχνολογίας.

β) Στη συνέχεια προτείναμε στους μαθητές το excel για να βρουν μια λύση. Το excel αποτελεί ένα γνώριμο εργαλείο με πιθανώς και άγνωστες ιδιότητες και οι μαθητές καλούνται να βρουν ακέραιες λύσεις με την βοήθεια του. Εδώ μπορούμε να δείξουμε (με προτζέκτορα) κάποια στοιχειώδη για το excel που τα έχουν ξανασυναντήσει στο παρελθόν και να αφήσουμε τους μαθητές να συνεργαστούν μεταξύ τους στο εργαστήριο πληροφορικής ή στο σπίτι τους με το εργαλείο αυτό.

Η συνέχεια μπορεί να δοθεί σε μια άλλη διδακτική ώρα μέσα στην τάξη με την παρουσίαση της κατασκευής ενός φύλλου εργασίας του excel (με προτζέκτορα) όπως το επισυναπτόμενο αρχείο *01-polygona.xls* (δύο προτάσεις - http://users.sch.gr/pzafeir/)

γ) Η δυσκολία που παρουσιάζει το excel και το πεπερασμένο των περιπτώσεων που εξετάζει δημιουργεί την αναγκαιότητα χρήσης ενός δυναμικότερου εργαλείου. Στους μαθητές προτείναμε τη χρήση της basic στην αρχή και της «Γλωσσομάθειας» μιας γλώσσας προγραμματισμού που υλοποιεί την «ψευδογλώσσα» που χρησιμοποιείται από το μάθημα της Γ΄ Λυκείου «Ανάπτυξη Εφαρμογών σε Προγραμματιστικό Περιβάλλον».

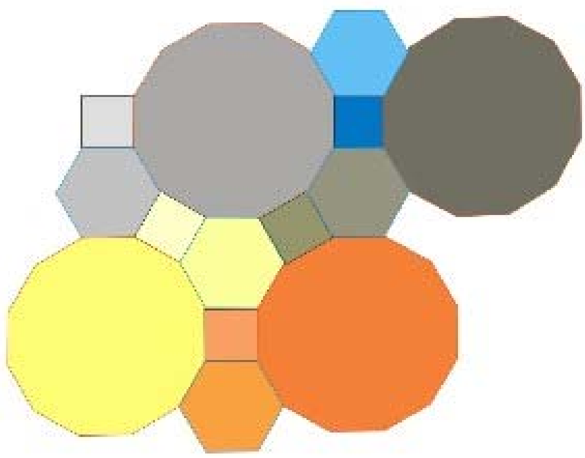
Παρουσιάσαμε στους μαθητές τον κώδικα με απλό τρόπο και τις λύσεις που δίνει. (Η προσέγγιση αυτή με τα προγραμματιστικά εργαλεία μπορεί να γίνει και με κάποιους μαθητές που γνωρίζουν ενδεχόμενα προγραμματισμό ή με τους συμμαθητές τους της Γ΄ Λυκείου που διδάσκονται το μάθημα Ανάπτυξη Εφαρμογών, στο εργαστήριο πληροφορικής αν υπάρχει αυτή η δυνατότητα.)

Η εφαρμογή των λογισμικών δίνει αρκετές λύσεις (στο παράρτημα στο τέλος & στο συνοδευτικό αρχείο basic *02-polyg1B.BAS* που ανοίγει μέσα από την εφαρμογή QBASIC, & το αρχείο ψευδογλώσσας *03-polygona2*)

Τώρα που είδαμε ότι υπάρχουν αρκετές λύσεις θέσαμε το ερώτημα «*η σχέση που δίνεται είναι αναγκαία και ικανή*;» αφού συζητήσαμε πρώτα τις έννοιες *«αναγκαία» και «ικανή»*

δ) Στο βήμα αυτό οι μαθητές αρχίζουν να ενεργοποιούνται και να συμμετέχουν και πάλι.

Προτείναμε την τριάδα των λύσεων 4, 6, 12. Τους προτείναμε να κατασκευάσουν στο τετράδιο τους με κανόνα και διαβήτη με την σειρά ένα κανονικό 12-γωνο, ένα κανονικό 6-γωνο και ένα 4-γωνο με το ίδιο μήκος πλευράς. Δώσαμε μέσα στην τάξη στους μαθητές πολλά τέτοια σχήματα (που προηγουμένως είχαμε σχεδιάσει, φωτοτυπήσει και κόψει) και τους ζητήσαμε αν είναι δυνατόν να πλακοστρώσουν με αυτά τα σχήματα μια επιφάνεια (puzzle). Τους προτείναμε να επαναλάβουν την διαδικασία και σπίτι τους.



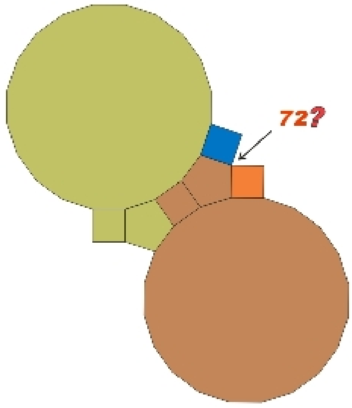
Η προσθήκη πλακιδίων *φαίνεται* ότι μπορεί να συνεχιστεί επ΄ άπειρον ώστε σε κάθε κορυφή να συναντώνται πάντα τρία διαφορετικά κανονικά πολύγωνα, όπως δείχνει και το παραπλεύρως σχήμα, μια κατασκευή (που έχει γίνει με την βοήθεια του

Corel Draw από τους εισηγητές, φάκελος *polygona 4-6-12,* με το αντίστοιχο αρχείο του Corel Draw ή με αρχεία εικόνων για όσους δεν έχουν το παραπάνω πρόγραμμα)

Μπορούμε αυτό να το γενικεύσουμε όμως για κάθε άλλη τριάδα λύσεων που πιθανόν υπάρχει; Θέσαμε το ερώτημα «*το παράδειγμα έχει αποδεικτική ισχύ;*»

Αφήσαμε το ερώτημα ανοιχτό και

ε) Προτείναμε μια νέα τριάδα λύσεων 4, 5, 20 και παρουσιάσαμε την κατασκευή με την βοήθεια του Corel Draw που όμως δεν μπορεί να δουλέψει επαναληπτικά και να γεμίσει ένα δάπεδο γιατί δημιουργεί επικάλυψη. (φάκελος *polygona 4-5-20* με το αντίστοιχο αρχείο του Corel Draw ή με αρχεία εικόνων) όπως δείχνει και το παραπλεύρως σχήμα.



Επαναφέραμε το ερώτημα «*το παράδειγμα έχει αποδεικτική ισχύ;*» Θέσαμε ξανά και το προηγούμενο ερώτημα «*η σχέση που δίνεται είναι αναγκαία και ικανή;*»

ΣΤΟΧΟΙ ΤΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ:

Η δραστηριότητα ξεκίνησε χωρίς σχεδιασμό κατά τη λύση της άσκησης και μοναδικός στόχος ήταν η «αφύπνιση» των μαθητών μας. Οι στόχοι του σεναρίου όταν το επαναλάβαμε (σχεδόν παράλληλα με την πρώτη φορά) ήταν η προσέγγιση της γνώσης μέσα από το πρόβλημα, η σύνδεση της γνώσης με το πρόβλημα, η μη σειριακή μάθηση, η χρήση των νέων τεχνολογιών με την χρήση λογισμικού που δεν αποτελούσε αυτοσκοπό του σεναρίου αλλά μέσο προσέγγισης που έρχεται να συμπληρώσει και όχι να αντικαταστήσει παραδοσιακούς τρόπους προσέγγισης.

ΔΟΜΗ ΤΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ:

> Ρόλος Εκπαιδευτικού:

Σαν Εκπαιδευτικοί φροντίσαμε για τον συντονισμό των δραστηριοτήτων του σεναρίου, θέσαμε το πρόβλημα, τους στόχους καθοδηγήσαμε και ενθαρρύναμε τους μαθητές μας. Αφήσαμε τους μαθητές μας να πειραματισθούν να δημιουργήσουν, να κάνουν λάθη και να τα διορθώσουν μεταξύ τους. Οι δραστηριότητες δεν συνοδεύτηκαν από φύλλο εργασίας και οι οποιεσδήποτε παρεμβάσεις έγιναν προφορικά στις συναντήσεις.

ΧΡΟΝΟΣ ΠΟΥ ΑΠΑΙΤΗΘΗΚΕ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΡΑΓΜΑΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ.

Ο χρόνος που απαιτήθηκε για την πραγματοποίηση του σεναρίου έκλεψε χρόνο από τον χρόνο του διδασκόμενου μαθήματος της Γεωμετρίας.

Έτσι για:

Το βήμα α) 1 διδακτική ώρα για την απόδειξη της σχέσης & 10 λεπτά από την επόμενη ώρα για την παρουσίαση των ακέραιων λύσεων.

Το βήμα β) 15 λεπτά από μία διδακτική ώρα για να δείξουμε (με προτζέκτορα) κάποια στοιχειώδη για το excel και 15 λεπτά από μία άλλη διδακτική ώρα για να δείξουμε τα αποτελέσματα.

Το βήμα γ) 1 διδακτική ώρα με προτζέκτορα στην τάξη για την παρουσίαση του κώδικα της basic & της Γλωσσομάθειας»

Το βήμα δ) 1 διδακτική ώρα στην τάξη για την τριάδα των λύσεων 4, 6, 12 και τη δημιουργία του puzzle

Το βήμα ε) 1 διδακτική ώρα στην τάξη για τη νέα τριάδα λύσεων 4, 5, 20 και την παρουσίαση στην τάξη με προτζέκτορα.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

> Μερικές από τις λύσεις που δίνει το excel (αρχείο 01-polygona)

κ	λ	μ	ωκ	ωλ	ωμ	φκ	φλ	φμ	
4	5	20	90,00	72,00	18,00	90,00	108,00	162,00	**360,00**
4	6	12	90,00	60,00	30,00	90,00	120,00	150,00	**360,00**
4	12	6	90,00	30,00	60,00	90,00	150,00	120,00	**360,00**

Οι παρακάτω κώδικες αποτελούν μια προγραμματιστική προσέγγιση των συγγραφέων χωρίς να αποκλείεται μία άλλη συντομότερη ή ορθότερη.

Επειδή το ζητούμενο δεν είναι ο προγραμματισμός, αυτή η λύση δόθηκε στους μαθητές και δεν γίνεται συζήτηση για το θέμα «συντομότερη ή ορθότερη.»

Ερωτήματα που μπορεί να τεθούν:

α) «Γιατί οι επαναλήψεις σταματούν στο 30;»

ΑΠ. Αυθαίρετο νούμερο που μπορεί να μεγαλώσει ή να μικρύνει ανάλογα με το πόσο ικανοποιημένοι είμαστε από τις λύσεις που δίνουν.

β) «Γιατί κάθε εμφωλευμένη επανάληψη ξεκινά από μία τιμή μεγαλύτερη της προηγούμενης;»

ΑΠ. Παρακάμπτει τον έλεγχο της συνθήκης $λ \neq μ \neq ν \neq λ$, αποφεύγει συμμετρικές λύσεις (πχ εμφανίζει την λύση 4, 6, 12 και αποφεύγει την 4, 12, 6). Για όλους τους παραπάνω λόγους συντομεύει το τρέξιμο του προγράμματος (εμφάνιση αποτελεσμάτων).

Αν τεθεί θέμα κατανόησης αντικαταστήστε στους κώδικες την αρχή της επανάληψης με την τιμή 3 (το μικρότερο κανονικό πολύγωνο)

> Ο κώδικας στην QBASIC

```
CLS
FOR K = 3 TO 30
  FOR L = K + 1 TO 30
    FOR M = L + 1 TO 30
       WK = 360 / K
       WL = 360 / L
       WM = 360 / M
        FL = 180 - WK
        FK = 180 - WL
        FM = 180 - WM
        SUM = FL + FK + FM
        IF SUM = 360 THEN PRINT K, L, M, FK, FL, FM
    NEXT M
  NEXT L
NEXT K
```

Και οι λύσεις που δίνει:

K	L	M	FK	FL	FM	K	L	M	FK	FL	FM
3	8	24	135	60	165	4	5	20	108	90	152
3	9	18	140	60	160	4	6	12	120	90	150
3	10	15	144	60	156						

> Ο κώδικας στην Γλωσσομάθεια

```
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ plakakia
ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ
        ΑΚΕΡΑΙΕΣ: κ,λ,μ
```

```
    ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ: ωκ,ωλ,ωμ,φκ,φλ,φμ,σ
ΑΡΧΗ
    ΓΙΑ κ ΑΠΟ 3 ΜΕΧΡΙ 30
        ΓΙΑ λ ΑΠΟ 3 ΜΕΧΡΙ 30
            ΓΙΑ μ ΑΠΟ 3 ΜΕΧΡΙ 30
                ωκ <-- 360 / κ
                ωλ <-- 360 / λ
                ωμ <-- 360 / μ
                φκ <-- 180 - ωκ
                φλ <-- 180 - ωλ
                φμ <-- 180 - ωμ
                σ <-- φκ + φλ + φμ
                ΑΝ σ = 360 ΤΟΤΕ
                    ΓΡΑΨΕ '(κ,λ,μ)=(',κ,'-',λ,'-',μ,')'
                ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
            ΤΕΛΟΣ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
        ΤΕΛΟΣ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
    ΤΕΛΟΣ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
ΤΕΛΟΣ_ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ plakakia
```

Οι λύσεις είναι ίδιες μόνο που δεν εμφανίζονται οι γωνίες των κανονικών πολυγώνων.

> Δυο λόγια για την Γλωσσομάθεια

Η «ΓλωσσοΜάθεια» είναι ένα ολοκληρωμένο εκπαιδευτικό περιβάλλον προγραμματισμού. Η γλώσσα που υλοποιεί είναι αυτή που διδάσκεται στα πλαίσια του πανελλαδικά εξεταζόμενου μαθήματος "Ανάπτυξη Εφαρμογών σε Προγραμματιστικό Περιβάλλον" (ΑΕΠΠ), της τεχνολογικής κατεύθυνσης της Γ' Λυκείου και διατίθεται δωρεάν από τον Κο Σπύρο Νικολαΐδη Καθ. Πληροφορικής (http://spinet.gr/glossomatheia/)

> Ο ΤΙΤΛΟΣ ΤΗΣ ΕΙΣΗΓΗΣΗΣ

«ΤΟ ΛΑΘΟΣ ΕΙΝΑΙ ΑΝΩΤΕΡΟ ΤΗΣ ΤΕΧΝΗΣ»

Τον τίτλο της εισήγησης τον *δανειστήκαμε* από την επιγραφή του ξυλουργείου του φίλου Ιωακείμ Πετρίδη από την Αζόλιμνο της Σύρου.

Προέκυψε από το δικό μας «Λάθος» να προτείνουμε την πρώτη φορά στους μαθητές πρώτα την λύση κ=4, λ=5, μ=20 που δεν μπορούσαν να την κατασκευάσουν, και από την «Λάθος» εκφώνηση της άσκησης του σχολικού βιβλίου.

Η εργασία έγινε στη Β΄τάξη του 1ου Λυκείου Παπάγου τη σχολ. χρονιά 2008-09
& παρουσιάστηκε στο 26ο Συνέδριο της
Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, Θεσσαλονίκη 13, 14, 15 Νοεμβρίου 2009
και έγινε με την πολύτιμη συνεργασία των συναδέλφων
Βροντάκη Εμμανουήλ & Γκόρου Παγώνας

Η εργασία αυτή, με τα σχετικά αρχεία, φιλοξενείτε στην Ιστοσελίδα:
http://sites.google.com/site/zafemath/